Minicorso
Controllo Statistico di Processo

di Andrea Saviano

Parte 5

- Ci sono dati e dati, premessa
- Fatti ed eventi
- Le trasformazioni
- Prendiamoci qualche confidenza
- I test: è la tua risposta definitiva?
- Uno per tutti e tutti per uno, un solo campione
- Differenze tra teoria e pratica oppure tra il prima e il dopo la cura, i test parametrici
- Meglio Coppi o Bartali? Confronti tra più campioni
- Alt dogana, i controlli in accettazione

Premessa

Nel momento in cui s'intende effettuare un controllo di processo sfruttando la teoria della probabilità e la statistica è opportuna rammentare alcuni punti fondamentali:

- **sampling method**, il metodo di campionamento e la numerosità del campione devono essere tali da assicurare l'affidabilità delle stime e la correttezza delle stesse;
- **data traceability**, deve sempre essere possibile ricostruire la storia dei dati;
- **real time data on line**, i dati devono essere sempre raccolti in linea e in "diretta" (lì dove si creano e quando si generano);
- **measurement classification**, l'acquisizione dei dati deve essere fatta con perizia altrimenti l'informazione che si ricava può portare a errate conclusioni quindi è necessario codificare gli attributi o definire le metodologie utilizzate per gli arrotondamenti e i troncamenti;
- **know how**, le normative possono rivestire aspetti pratici in quanto schematizzano l'impiego delle tecniche statistiche, tuttavia un tecnico del controllo statistico di processo sa benissimo che un'applicazione *tal quel* (cioè senza il *cum grano salis*) di queste normative può falsare i risultati così ottenuti.

Di questi argomenti, tutti importanti, risulta fondamentale la ricostruibilità delle informazioni connesse al processo, perché il controllo statistico di processo consiste nella determinazione delle cause, non dei colpevoli e tanto meno degli effetti.
Diventa quindi fondamentale definire gli effetti e i modi in cui si manifestano i problemi, tecnica nota come FMEA (**Failure Mode and Effect Analysis**) o analisi dei modi e degli effetti con i quali si manifestano i "guasti".
Ad esempio, un problema di **presenza di cavità** in un getto può essere un **difetto di tipo estetico** (EFFETTO), ma può essere anche preoccupante per eventuali fenomeni di **perdita in tenuta gas**

(EFFETTO), tuttavia i modi (CAUSE) in cui si manifestano le cavità sono i medesimi a prescindere da come si consideri l'effetto per l'utente finale.
Diventa quindi importante definire correttamente gli effetti per quanto riguarda il processo per ricondurlo alle varie cause possibili, perché è evidente che una perdita in tenuta a causa di problemi nel corso dell'impregnazione è differente da quella dovuta alla presenza di cavità. Infatti, nel secondo caso sarebbe corretto di parlare del problema come impregnazione non efficiente e non di getto che perde.
Attenzione, per quanto tutto ciò possa apparire talmente ovvio da sembrare banale, su questi errori d'approccio il tecnico di controllo di processo si trova spesso a discutere con i responsabili di produzione, la struttura commerciale e, persino, la direzione, giacché **ognuno tende a vedere gli effetti dal proprio punto di vista soggettivo, piuttosto che porsi in maniera oggettiva di fronte al processo di produzione** (un dovere per chi effettua il controllo statistico di processo).
Si comprende quindi l'importanza dell'utilizzo nel controllo di processo di strumenti come l'analisi di Pareto, gli schemi di Ishikawa per l'analisi cause-effetto e, più in generale, tutti i metodi di analisi oggettiva tipici del problem-solving.
Diventa quindi opportuno diffondere la conoscenza di queste tecniche, anche se ciò è ostacolato dalla maggior parte delle direzioni aziendali che troppo spesso vedono la cosa come un'inutile perdita di tempo.

Fatti ed eventi

Al contrario della cultura deterministica imperante, molti dei fenomeni fisici non sono regolati da ferree leggi matematiche e in questo ambito è utile analizzare la sottile differenza tra:

- **fatti**;
- **eventi**.

Nell'ambito in questione, un evento è un qualcosa di per sé né vero né falso, perché si tratta di qualcosa di possibile, quello che in statistica è definito come affermazione aleatoria. Ancora più sottile è la differenza tra un evento improbabile e impossibile. Come insegna il paradosso di Borel, se un esperimento può essere ripetuto infinite volte nelle stesse condizioni, a furia di provare, una qualsiasi combinazione di eventi anche di probabilità irrisoria non nulla si verificherà prima o poi con probabilità uno (evento certo).
Cosicché i fatti sono ciò che avvalora o smentisce un'affermazione legata a un evento aleatorio (ad esempio: la giocata al superenalotto è la previsione di un evento aleatorio, mentre l'estrazione è un fatto).
In pratica solo i fatti possono smentire o confermare un evento formulato in precedenza e, mentre i secondi possono essere smentiti, i primi no.
Gli eventi rappresentano in statistica delle variabili aleatorie, cioè qualcosa di non conosciuto, sebbene individuato senza possibilità di fraintendimenti. Ne consegue che ad ogni evento è associata una probabilità, la quale esprime il **livello di fiducia** che si ha nella possibilità che esso si verifichi.

Le trasformazioni

Lasciando da parte i licantropi e le notti di luna piena, consideriamo la seguente uguaglianza:

$$V(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

e la seguente trasformazione lineare:

$$Y = a + b \cdot X$$

Si vede che a seguito di ciò la media **M(*y*)** è data da:

$$\begin{aligned} M(y) &= M(a + b \cdot x) \\ &= M(a) + M(b \cdot x) \\ &= a + b \cdot M(x) \end{aligned}$$

mentre la varianza **V(*y*)** è data da:

$$\begin{aligned} V(y) &= M\left((y - m_y)^2\right) \\ &= M\left([(a + b \cdot x) - (a + b \cdot m_x)]^2\right) \\ &= b^2 \cdot M\left((x - m_x)^2\right) \\ &= b^2 \cdot V(x) \end{aligned}$$

Questa trasformazione, oltre ad essere un buon esempio per altre trasformazioni non lineari, è importante perché nel controllo statistico di processo occorre distinguere i seguenti valori:

- x_i = valore che si ottiene dal campione esaminato (quindi una variabile aleatoria);
- ***m*** **=** media che si ottiene dal campione esaminato (essendo funzione di variabili aleatorie è essa stessa una variabile aleatoria);
- ***μ*** **=** valore atteso corrispondente alla media della popolazione (quindi il più delle volte un valore ignoto).

Verifichiamo quindi come variano gli scarti quadratici di un campione:

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2\right)$$

ora:

$$\begin{aligned} (x_i - m)^2 &= [(x_i - \mu) - (m - \mu)]^2 \\ &= (x_i - \mu)^2 - 2 \cdot (x_i - \mu) \cdot (m - \mu) + (m - \mu)^2 \end{aligned}$$

perciò la precedente sommatoria si divide in tre addendi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - 2 \cdot (m - \mu) \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) + n \cdot (m - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - 2 \cdot (m - \mu) \cdot \left(n \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - n \cdot \mu\right) + n \cdot (m - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - 2 \cdot (m - \mu) \cdot n \cdot (m - \mu) + n \cdot (m - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - 2 \cdot n \cdot (m - \mu)^2 + n \cdot (m - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - n \cdot (m - \mu)^2 \end{aligned}$$

quindi:

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n\cdot(m-\mu)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}E(x_i-\mu)^2 - n\cdot E(m-\mu)^2\\
&= n\cdot\sigma^2-\sigma^2\\
&= (n-1)\cdot\sigma^2
\end{aligned}
$$

Concludendo:

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}\right)=\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2$$

Da ciò deriva che uno stimatore corretto per $\boldsymbol{\sigma}$ è:

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}\right)\cong\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2 \Rightarrow \sigma^2\cong\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n-1}=s^2$$

Ne derivano le seguenti importanti relazioni:

$$
\begin{aligned}
&M(x_i-m)^2=s^2\cdot\frac{n-1}{n}\\
&M(m-\mu)^2=\frac{\sigma^2}{n}\\
&M(x_i-\mu)^2=\sigma^2
\end{aligned}
$$

Prendiamoci qualche confidenza

Chi esegue il controllo statistico di processo si rende ben presto conto che tra i dati sperimentali e i modelli probabilistici teorici non sempre c'è quell'aderenza che si desidererebbe, questo perché le funzioni di densità di probabilità (**p.d.f.** = *probability density function*) sono degli schemi preconfezionati applicabili alle popolazioni, mentre la statistica inferenziale si basa sul tentativo di adattare i valori reali emersi da un campionamento a tali modelli.
Ciò che in realtà si conosce, in base al teorema del limite centrale è che:

$$E(m)=\mu \quad Var(m)=\frac{\sigma^2}{n} \quad E(s^2)=\sigma^2 \quad Var(s^2)=2\cdot\frac{\sigma^4}{n-1}$$

S'introduce così il concetto di **stimatore**.

Stimatore corretto

In generale definiamo la variabile casuale $\hat{O}_n$ uno **stimatore corretto** di un parametro O se:

$$E(\hat{O}_n) = O$$

Stimatore consistente

La variabile casuale $\hat{O}_n$ è invece detta uno **stimatore consistente** se, fissati ε e δ positivi:

$$\Pr(\left|\hat{O}_n - O\right| < \delta) > 1 - \varepsilon$$

Stimatore efficiente

La variabile casuale $\hat{O}_n$ è detta uno **stimatore efficiente** se:

$$\sigma_O = E(\hat{O}_n - O)^2$$

Stima puntuale e per intervalli

Supponiamo ora di essere gravemente malati e che un celebre diagnosta ci proponga una miracolosa terapia asserendo: « *Chi assume questo farmaco guarisce nel 70% dei casi*. »
Questa è una stima puntuale e in realtà per uno statistico non dice molto, salvo il fatto che in un campione di n pazienti una quota $n \cdot p$ è guarita dopo aver assunto tale medicinale.
Ripresentiamo la medesima frase ma sotto un'ottica diversa: « *Confido al 95% che se lei assumerà questo medicinale ci possa essere una probabilità del 70% che lei guarisca*. »
Questa è una stima per intervallo dove in base ad un **rischio** α si ottiene un complementare **livello di confidenza** 1- α che porta a definire un intervallo di confidenza.
Ora il vero problema per definire l'intervallo di confidenza di uno stimatore $\hat{O}_n$ è che dovrebbe essere noto il valore reale O.
Per ovviare a questo problema si utilizzano delle particolari funzioni inferenziali che *servono* per aggirare il problema che, proprio perché prestano un servizio, sono dette funzioni ancillari.

La funzione ancillare u standard normalizzata

Consideriamo la seguente funzione degli errori che sappiamo essere descritta dalla funzione di densità di probabilità cumulativa (**c.d.f.** = *cumulative distribution function*) normale standard:

$$u = \frac{m - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Per ogni valore $\boldsymbol{\alpha}$ è possibile associare una delle seguenti relazioni:

$$\Pr\left(-u_{\alpha/2} \le \frac{m - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le u_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left(-u_{\alpha} \le \frac{m - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left(\frac{m - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le u_{\alpha} \right) = 1 - \alpha$$

a seconda che si tratti di una limitazione bilaterale o unilaterale.
Se consideriamo il primo caso (quello bilaterale) è facile giungere alla relazione:

$$\Pr\left(m - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le m + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

in cui si asserisce: la probabilità che il *valore vero* $\boldsymbol{\mu}$ della media della popolazione sia all'interno di tale intervallo è pari a 1-$\boldsymbol{\alpha}$.
Quello appena costruito altro non è che un intervallo di confidenza per la media $\boldsymbol{\mu}$ al livello 1-$\boldsymbol{\alpha}$, il quale indica che esiste sempre una probabilità pari ad $\boldsymbol{\alpha}$ che i dati campionari provengano da una popolazione con una media che si trova al di fuori dell'intervallo:

$$\left[m - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; m + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

dove il valore:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

assume il chiaro significato di **errore della stima**. Si comprende facilmente come l'errore diminuisca all'aumentare della numerosità del campione (in effetti, quando questo ha la medesima dimensione della popolazione $\boldsymbol{m}$ coincide con $\boldsymbol{\mu}$).

La funzione ancillare t di Student

Nella maggior parte delle applicazioni è difficile avere una stima attendibile della varianza della popolazione, per cui si preferisce stimarla sulla base del campione estratto.

$$\sigma^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n-1} = s^2$$

Consideriamo la seguente funzione degli errori:

$$t = \frac{m-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

che sappiamo essere descritta, per $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}$-1 gradi di libertà, dalla funzione di densità di probabilità cumulativa di Student.
In questo caso per ogni valore $\boldsymbol{\alpha}$ è possibile associare una delle seguenti relazioni:

$$\Pr\left(-t_{\nu,\alpha/2} \le \frac{m-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \le t_{\nu,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Pr\left(-t_{\nu,\alpha} \le \frac{m-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Pr\left(\frac{m-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \le t_{\nu,\alpha}\right) = 1-\alpha$$

a seconda che si tratti di una limitazione bilaterale o unilaterale.
Se consideriamo il caso bilaterale, si giunge alla relazione:

$$\Pr\left(m - t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le m + t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

La funzione ancillare κ del chi-quadro

Spesso accade che si voglia definire l'intervallo di confidenza non tanto della media quanto della varianza.
Consideriamo la seguente funzione:

$$\kappa = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$$

che è descritta dalla funzione di densità di probabilità cumulativa del chi-quadro.
In questo caso per ogni valore α è possibile associare una delle seguenti relazioni:

$$\Pr\left(\kappa_{\nu,1} \le (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} \le \kappa_{\nu,2} \right) = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left(\kappa_{\nu,3} \le (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} \right) = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left((n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} \le \kappa_{\nu,4} \right) = 1 - \alpha$$

che, nel caso bilaterale, porta a:

$$\Pr\left((n-1) \cdot \frac{s^2}{\kappa_{\nu,1}} \le \sigma^2 \le (n-1) \cdot \frac{s^2}{\kappa_{\nu,2}} \right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \nu = n - 1$$

La funzione ancillare F di Fisher – Snedecor

A volte capita che si voglia definire l'intervallo di confidenza per il rapporto tra due varianze.
Consideriamo la seguente funzione:

$$F = \frac{s_1^2}{\sigma_1^2} \bigg/ \frac{s_2^2}{\sigma_2^2}$$

che è descritta dalla funzione di densità di probabilità cumulativa F di Fisher - Snedecor.
In questo caso per ogni valore α è possibile associare una delle seguenti relazioni:

$$\Pr\left(z_{\nu_1,\nu_2,1-\alpha} \le \frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}} \le z_{\nu_1,\nu_2,\alpha/2} \right) = 1-\alpha$$

che porta a:

$$\Pr\left(\frac{s_2^2}{s_1^2} \cdot z_{\nu_1,\nu_2,1-\alpha} \le \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le \frac{s_2^2}{s_1^2} \cdot z_{\nu_1,\nu_2,\alpha/2} \right) = 1-\alpha$$

Intervalli di confidenza per le proporzioni

Nel caso in cui la distribuzione di probabilità riguardi una proporzione e π rappresenti il valore reale mentre p sia il valore che scaturisce dal campione, si ha:

$$\Pr\left(-u_{\alpha/2} \le \frac{p-\pi}{\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}} \le u_{\alpha/2} \right) = 1-\alpha$$

che porta a:

$$\Pr\left(p - u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \le \pi \le p + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \right) = 1-\alpha$$

I test: è la tua risposta definitiva?

Una delle questioni che più spesso si devono affrontare nel controllo statistico di processo e la verifica di un'ipotesi. In pratica si tratta di formulare un'ipotesi sul comportamento della popolazione e, tramite un campione, verificare se tale ipotesi può essere considerata accettabile o no.
In tal modo ci si trova davanti a due congetture dette:

- **ipotesi nulla** indicata con $\mathbf{H}_0$;
- **ipotesi alternativa** indicata con $\mathbf{H}_1$.

Solitamente l'ipotesi nulla consiste in un'eguaglianza del tipo:

H_0	H_1
$a = a_0$	$a \neq a_0$
$a \in [a_1; a_2]$	$a \notin [a_1; a_2]$
$a \geq a_0$	$a < a_0$

Per verificare un'ipotesi solitamente si realizza un esperimento. Se i risultati ottenuti sotto tale presupposto sono probabili, allora l'ipotesi si considera valida, poiché non esiste alcuna evidenza statistica per farlo. Viceversa, qualora i risultati dimostrassero poco probabile l'ipotesi considerata, allora la stessa andrebbe rifiutata. È tuttavia importante ricordare che il fatto di respingere un'ipotesi a seguito di un test statistico non vuol dire a priori che tale ipotesi possa essere falsa con assoluta certezza (infatti, l'inferenza statistica opera per induzione e non per deduzione).

Orrore! Errori di tipo I e II

Ogni test delle ipotesi con una decisione:
- si accetta H_0
- si rifiuta H_0

Tale decisione è ottenuta tramite un'inferenza su una caratteristica incognita della popolazione basandosi su una statistica campionaria e conseguentemente c'è un rischio di prendere lanterne per lucciole secondo uno schema di possibilità che è facilmente rappresentabile con una tabella:

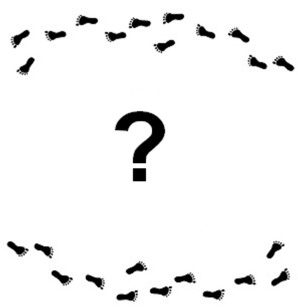
test	H_0 è	
decisione	**vera**	**falsa**
H_0 accettata	giusto	errore II
H_0 rifiutata	errore I	giusto

- si commette un **errore di I tipo** se l'ipotesi H_0 è vera, ma viene respinta;
- si commette un **errore di II tipo** se l'ipotesi H_0 è falsa, ma viene accettata.

La probabilità o rischio del primo caso è α, mentre nel secondo è β. La probabilità 1-α è chiamata: **livello di confidenza del test**.
Per il significato che i valori α e β assumono nel controllo in accettazione (cioè nel campionamento di un lotto in ingresso per giudicarne la bontà) si ha che:
- α rappresenta il **rischio del fornitore** (si respinge mediante un controllo a campione un lotto che invece è conforme);
- β rappresenta il **rischio del cliente** (si approva mediante un controllo a campione un lotto che invece è conforme).

I test, passo – passo

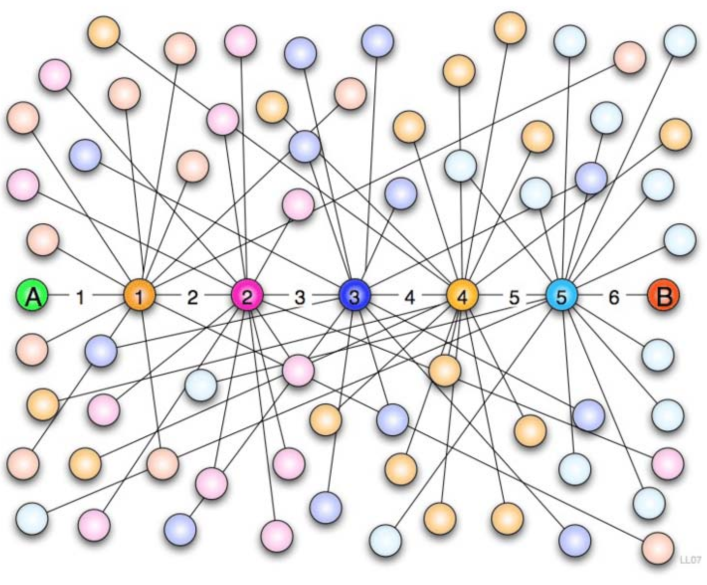
Di test ne esistono svariati, secondo le esigenze specifiche. Tuttavia questi si possono suddividere essenzialmente in due categorie:
- test di un parametro campionario rispetto a quello riferito alla popolazione;
- test di confronto tra il medesimo parametro proveniente da due differenti campioni.



L'applicazione di un test statistico può essere schematizzato tramite una sequenza di attività:

1. formulazione dell'ipotesi nulla $\mathbf{H}_0$ (che consiste essenzialmente in un'equazione),
2. formulazione dell'ipotesi alternativa $\mathbf{H}_1$ (che consiste essenzialmente in una relazione che può essere bilaterale o unilaterale),
3. determinazione dell'indice statistico su cui basare il test (il quale dipende dal tipo di ipotesi $\mathbf{H}_0$ formulata);
4. determinazione del rischio $\boldsymbol{\alpha}$ (quindi del livello di confidenza 1-$\boldsymbol{\alpha}$);
5. determinazione del rischio $\boldsymbol{\beta}$;
6. determinazione della numerosità del campione $\boldsymbol{n}$ (abbastanza grande da offrire una decisione affidabile e sufficientemente piccolo da rendere il controllo economico);
7. calcolo dell'indice derivante dalla statistica sul campione;
8. determinazione della regione critica in base ai rischi $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$;
9. accettazione o rifiuto di $\mathbf{H}_0$;
10. avvio delle decisioni e delle attività connesse all'esito del test.

6 gradi di… libertà



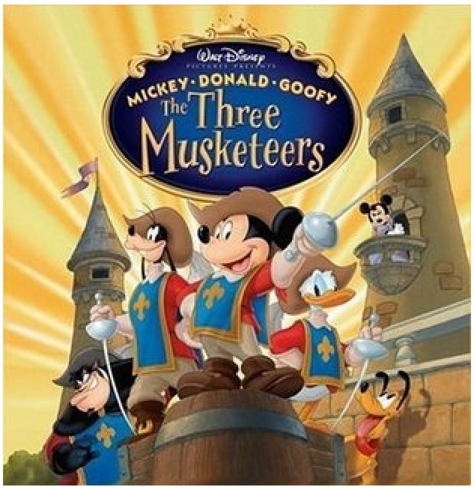
Al fine di poter calcolare dei valori provenienti da una statistica è opportuno definire il concetto di **numero di gradi di libertà**, indicato con il simbolo $\boldsymbol{\nu}$.
Con gradi di libertà di una statistica s'intende il numero di dati osservati nel campione che si possono considerare indipendenti.
Se:

- $\boldsymbol{\nu}$ = numero di osservazioni indipendenti;
- $\boldsymbol{n}$ = numero di osservazioni;
- $\boldsymbol{k}$ = numero di parametri della popolazione stimati per mezzo dell'osservazione campionaria e che quindi legano tra di loro le osservazioni mediante relazioni di dipendenza;

$$\nu = n - k$$

Ad esempio, se i dati sono legati da una media e una varianza si avrà $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n} - 2$ osservazioni indipendenti.

Uno per tutti e tutti per uno, campioni e stimatori



Molte stime provengono da un unico campione è per esse può essere basilare comprendere se gli indici provenienti dal campione differiscono dal valore atteso per una normale fluttuazione naturale o per delle precise cause. Viceversa può essere necessario verificare se dei mutamenti apportati al processo abbiano apportato o no dei miglioramenti.

Test sulla media di una variabile aleatoria gaussiana con varianza nota

Si pensi di controllare un processo di confezionamento di caffè tostato e macinato tramite la verifica a intervalli regolari del valore del contenuto in peso del pacco che per il processo in questione è ritenuta una caratteristica "speciale".
Per rendere più semplice la cosa vediamo anche di fornire alcuni dati:

- $\boldsymbol{\mu}_0$ = 250 grammi, valore medio atteso per il lotto di produzione;
- $\boldsymbol{\sigma}_0$ = 5 grammi, valore dello scarto quadratico atteso per il lotto di produzione.

Conseguentemente, durante il processo di confezione, ad ogni verifica ci si aspetti di registrare misure del tipo:

$$x = \mu_0 \pm 3 \cdot \sigma_0 = 250 \pm 15\ g$$

Si supponga di ottenere $\boldsymbol{x}$ = 237 g, un valore che risulta molto vicino al limite di tolleranza, per cui risulta inatteso perché poco probabile. Il dubbio che può sorgere spontaneamente è che il processo possa aver subito dei mutamenti e per verificare ciò occorre effettuare un test sulla media estraendo ulteriori 15 valori che costituiscano il campione di riscontro.

237	249	251	257	247	248	253	246
239	252	248	256	241	255	248	259

Tale campione risulta avere una media pari a $\boldsymbol{m} \approx 249$ g.
Vista la numerosità del lotto di provenienza, è plausibile ritenere che la variabile aleatoria x si distribuisca secondo una curva di probabilità normale. Se si considera quindi la funzione ancillare:

$$u = \frac{m - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$$

essa ha certamente una distribuzione di tipo normale standard. Vogliamo quindi verificare con un livello di confidenza unilaterale sinistro α = 5% (u_α = -1.645) che sia valida l'ipotesi che il campione appartenga ad una popolazione avente come media μ_0 e come scarto quadratico medio σ_0.
Nel caso specifico la funzione ancillare assume il valore $u = -0.700 > u_\alpha$.
Questo significa che il campione non assume un valore $u < u_\alpha$ tale da porre l'ipotesi $\mu = \mu_0$ nell'area sinistra del rifiuto, ovvero: pur essendo basso, il valore rilevato durante il normale controllo c'induce a ritenere con un livello di confidenza del 95% che il processo di confezionamento del lotto stia operando correttamente.

Test sulla media di una variabile aleatoria gaussiana con varianza ignota e ν gradi di libertà

Molto spesso in un processo produttivo è noto il valore atteso μ_0 ma non lo scarto quadratico medio σ_0 (o meglio il suo quadrato, cioè la varianza) il quale viene stimato tramite il campionamento.
In tal caso la funzione ancillare assume la forma:

$$t = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

e il suo andamento segue la distribuzione di Student per ν gradi di libertà, infatti come asserito si conosce il valore atteso per la media ma la varianza (pari al quadrato di σ_0) è ignota.
Per il campione considerato:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}{n-1} = 40.1$$

Vogliamo quindi verificare, sempre con un livello di confidenza unilaterale sinistro α = 5% ($t_{\alpha,\nu}$ = -1.753), che sia valida l'ipotesi che il campione appartenga ad una popolazione avente come media μ_0.
Nel caso specifico la funzione ancillare assume il valore $t = -0.533 > t_{\alpha,\nu}$.
Questo significa che il campione non assume un valore $t < t_{\alpha,\nu}$ tale da porre l'ipotesi $\mu = \mu_0$ nell'area sinistra del rifiuto, ancora una volta: pur essendo basso, il valore rilevato durante il normale controllo c'induce a ritenere con un livello di confidenza del 95% che il processo di confezionamento del lotto stia operando correttamente.

Test sulla varianza di una variabile aleatoria gaussiana con ν gradi di libertà

Si voglia invece verificare se la tolleranza sul peso, intesa come variabilità del dato rilevato, corrisponda alla specifica.
In tal caso la funzione ancillare assume la forma:

$$\kappa = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma_0^2}$$

e il suo andamento segue la distribuzione del chi-quadro per ν gradi di libertà, infatti come asserito si conosce il valore atteso per la media ma la varianza (pari al quadrato di σ_0) è ignota.
Vogliamo quindi verificare, con un livello di confidenza unilaterale destro α = 5% ($\kappa_{\alpha,\nu}$ = 24.994), che sia valida l'ipotesi che il campione appartenga ad una popolazione avente come media μ_0.
Nel caso specifico la funzione ancillare assume il valore $\kappa = 24.070 < \kappa_{\alpha,\nu}$.
Questo significa che il campione non assume un valore $\kappa > \kappa_{\alpha,\nu}$ tale da porre l'ipotesi $\mu = \mu_0$ nell'area destra del rifiuto, ancora una volta: pur essendo basso, il valore rilevato durante il normale controllo c'induce a

ritenere con un livello di confidenza del 95% che il processo di confezionamento del lotto stia operando correttamente.

Differenze tra teoria e pratica oppure tra il prima e il dopo la cura, i test parametrici

Spesso il dato che emerge dal campionamento non corrisponde alle attese teoriche del modello di riferimento, anche in questo caso i test statistici forniscono un valido aiuto per confermare o rigettare l'ipotesi che il campione si comporti secondo un certo schema di distribuzione di probabilità o che un determinato cambiamento abbia apportato modifiche sostanziali al processo.

Il test esatto di Fisher su due campioni

Uno degli ambiti entro il quale un esperto in statistica deve saper dare una risposta è quello dell'efficacia (ovviamente migliorativa) di una correzione apportata al processo.
Il modo migliore per verificare l'efficacia di un rimedio è quella di effettuare un confronto tra lo stato dell'arte prima e dopo la "cura".
Si tratta di effettuare un confronto tra due proporzioni, utilizzando lo schema della tabella a doppia entrata.

Test	A	B	
+	a_+	b_+	n_+
-	a_-	b_-	n_-
	n_A	n_B	n

Si prelevano quindi n_B elementi prodotti prima della revisione e n_A dopo aver messo in atto le azioni correttive. L'esito al test è positivo se si riscontra il difetto e negativo nel caso contrario (il concetto di positività al test consta, infatti, trovare la non conformità). Sia a_+ e b_+ la quantità di pezzi non conformi presenti rispettivamente nel lotto dei pezzi dopo e prima della revisione.
Si deve discernere tra due ipotesi:

- H_0, $\mathbf{Pr}(a_+/n_A)=\mathbf{Pr}(b_+/n_B)$
- H_1, $\mathbf{Pr}(a_+/n_A)<\mathbf{Pr}(b_+/n_B)$

Supponiamo che il primo lotto sia:

- n_A=12 pezzi
- n_B=15 pezzi
- a_+=2 pezzi
- b_+=6 pezzi

Il test chi-quadro dell'adattamento

Quando si effettua un controllo di tipo statistico può essere utile verificare se il comportamento del campione corrisponde a quello atteso o presenti significative differenze.
Se:

- f_i = frequenze effettivamente registrate;
- φ_i = frequenze teoriche attese;
- N = numero di elementi componenti il campione;
- n = numero di classi in cui s'è suddiviso il campione.

una valida misura di tale discrepanza è fornita dalla seguente statistica:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(f_i - \varphi_i\right)^2}{\varphi_i}$$

il cui valore dipende dalle differenze tra andamento reale e quello teorico e il cui andamento segue la distribuzione del chi-quadro per $\boldsymbol{\nu}$ gradi di libertà.

	1		***i***		***n***	Tot
Reale	f_1		f_i		f_n	$=N$
Teorico	φ_1		φ_i		φ_n	
	$\frac{(f_1 - \varphi_1)^2}{\varphi_1}$		$\frac{(f_i - \varphi_i)^2}{\varphi_i}$		$\frac{(f_n - \varphi_n)^2}{\varphi_n}$	$=\chi^2$

Consideriamo la verifica per attributi di un campione di 100 pezzi in cui il livello di difettosità teorico del lotto sia p_0 = 4%.

	KO	**OK**	Tot
Reale	8	92	=100
Teorico	4	96	
	4.00	0.17	=**4.170**

Nel caso in essere ν = 1, perché si non considerano i 100 pezzi ma le 2 classi in cui sono suddivisi.
Vogliamo quindi verificare, con un livello di confidenza unilaterale destro α = 5% ($\chi^2_{\alpha,\nu}$ = 3.841), che il campione si comporti come una proporzione con $p = p_0$.
Nel caso specifico $\chi^2 = 4.170 > \chi^2_{\alpha,\nu}$.
Questo c'induce a ritenere con un livello di confidenza del 95% che l'ipotesi $p = p_0$ vada rigettata.
Tra quello esatto di Fisher e quello del chi-quadro quale test usare è meglio usare? Una possibile risposta può essere fornita dalla successiva tabella:

caso	**dim**	**chi-quadro**
2x2	n>40	sempre
2x2	n>25	se φ_i>5 $\forall i$
2x2	n>20	mai (Fisher)
2xm	n>25	se per l'80% dei casi φ_i>5

Meglio Coppi o Bartali? Confronti tra più campioni

Un'altra serie di utili test è rappresentato da quelli che permettono di verificare l'indipendenza di due differenti campioni o di confrontare i reciproci stimatori.

Test sulla differenza tra due medie caratterizzate da una medesima varianza incognita

Test di confronto tra due varianze

Test sulla differenza tra medie di campioni aventi medesima varianza incognita

Test di omogeneità tra n varianze

Alt dogana, i controlli in accettazione

Spesso nel controllo statistico di processo ci si trova davanti al problema di decidere su un avanzamento di fase. In pratica si tratta di decidere se un intero lotto può giudicarsi conforme rispetto a una determinata specifica di difettosità $\boldsymbol{\pi}$ tenendo conto delle soglie di rischio $\boldsymbol{\alpha}$ (**rischio del fornitore**) e $\boldsymbol{\beta}$ (**rischio dell'acquirente**).
Si tratta quindi di un tipico controllo per attributi in cui è necessario determinare a priori i parametri del campionamento:

- $\boldsymbol{p}_0$ = valore soglia della difettosità rilevata nel campione;
- $\boldsymbol{n}$ = numerosità del campione.
- $\boldsymbol{p}_\alpha$ = livello di qualità accettabile **AQL** (*acceptable quality level*);
- $\boldsymbol{p}_\beta$ = livello di qualità rifiutabile **RQL** (*rejecyable quality level*);

Supponendo di operare su grandi campioni (cioè $\boldsymbol{n} \geq 30$ in modo che la distribuzione di $\boldsymbol{p}$ segua un andamento normale), il rispetto congiunto dei margini d'errore $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ in un campione bernoulliano di $\boldsymbol{n}$ elementi è condizionato dal soddisfacimento del sistema:

$$\begin{cases} \Pr(p > p_0 \mid H_0) = \alpha \\ \Pr(p \leq p_0 \mid H_0) = \beta \end{cases}$$

Ci si trova quindi nella tipica condizione del test di approvazione di un'ipotesi H_0 che viene ritenuta accettabile se $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{p}_0$ dove si sovrappongono la coda destra $\boldsymbol{\alpha}$ e sinistra $\boldsymbol{\beta}$.

$$\begin{cases} \Pr\left(u_\alpha > \dfrac{p_0 - p}{\sqrt{\dfrac{p \cdot q}{n}}}\right) = \alpha \\ \Pr\left(u_\beta \leq \dfrac{p_0 - p}{\sqrt{\dfrac{p \cdot q}{n}}}\right) = \beta \end{cases}$$

da cui, utilizzando i livelli di qualità $\boldsymbol{p}_\alpha$ e $\boldsymbol{p}_\beta$:

$$\begin{cases} \dfrac{p_0 - p_\alpha}{\sqrt{p_\alpha \cdot q_\alpha}} \cdot \sqrt{n} = u_\alpha \\ \dfrac{p_0 - p_\beta}{\sqrt{p_\beta \cdot q_\beta}} \cdot \sqrt{n} = -u_\beta \end{cases}$$

che (risolta dividendo membro a membro le due equazioni) fornisce il valore di soglia $\boldsymbol{p}_0$:

$$p_0 = \frac{p_\alpha \cdot u_\beta \cdot \sqrt{p_\beta \cdot q_\beta} + p_\beta \cdot u_\alpha \cdot \sqrt{p_\alpha \cdot q_\alpha}}{u_\alpha \cdot \sqrt{p_\alpha \cdot q_\alpha} + u_\beta \cdot \sqrt{p_\beta \cdot q_\beta}}$$

ovvero una particolare media ponderata dei due parametri $\boldsymbol{p}_\alpha$ e $\boldsymbol{p}_\beta$ che poi fornisce la dimensione del campione $\boldsymbol{n}$:

$$n = u_\alpha^2 \cdot \frac{p_\alpha \cdot q_\alpha}{(p_0 - p_\alpha)^2} = u_\beta^2 \cdot \frac{p_\beta \cdot q_\beta}{(p_0 - p_\beta)^2}$$

Attributi Vs valori

È facile comprendere che le precedenti formule possono estendersi dalle proporzioni al caso dei valori continui:

$$\begin{cases} \Pr(u_\alpha > \dfrac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = \alpha \\ \Pr(u_\beta \le \dfrac{\mu_0 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = \beta \end{cases}$$

Tuttavia i punti di forza di un controllo in accettazione sono:

- economicità;
- rapidità;
- semplicità.

Ne consegue che si preferisce far ricorso a dei sistemi del tipo passa/non-passa piuttosto che effettuare delle rilevazioni puntali di un valore. Questo perché nel controllo in accettazione è necessario decidere rapidamente su grandi quantitativi in ingresso e non sulla capacità del processo di raggiungere i valori richiesti.

La curva operativa

In un controllo in accettazione per attributi tramite campionamento è logico che non vi sia reinserimento ma l'estrazione in blocco dalla popolazione di alcuni esemplari.
Per cui posto che sia:

- ***N*** = numerosità del lotto;
- ***n*** = numerosità del campione;
- ***D*** = numero dei pezzi difettosi nel lotto (valore ignoto);
- ***d*** = numero massimo di pezzi difettosi nel campione;

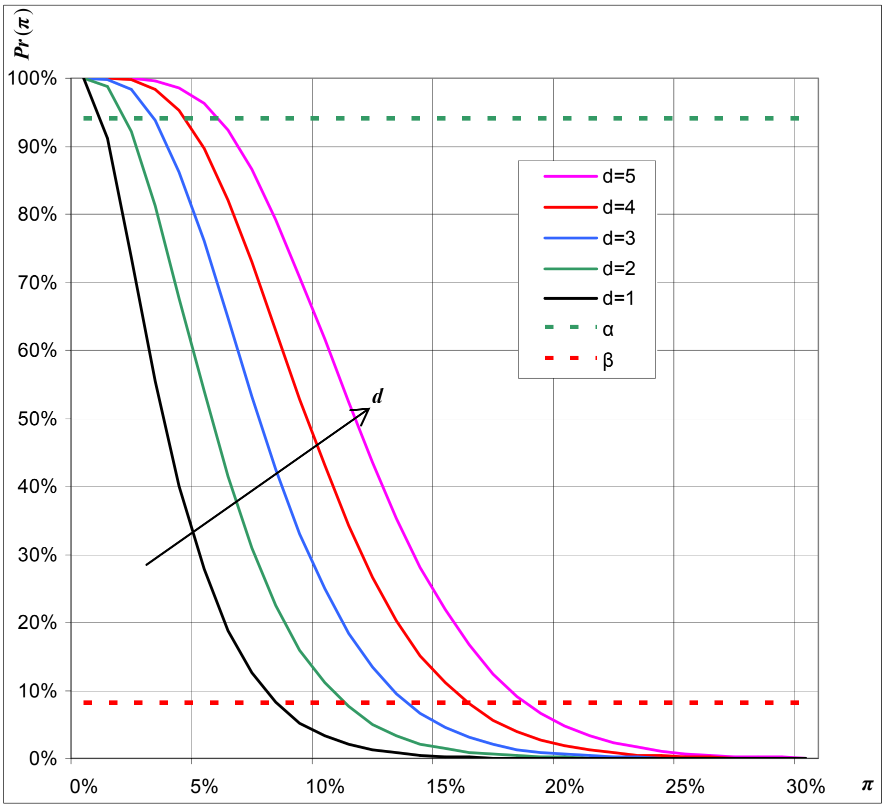
si definisce

$$\pi = \frac{D}{N}$$

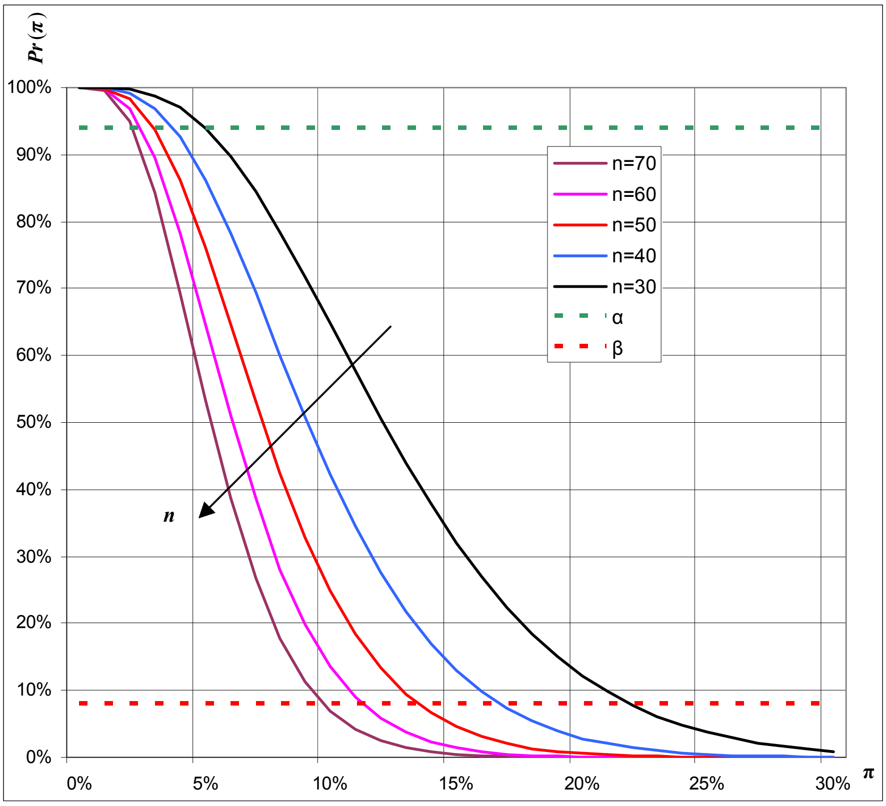
la probabilità $Pr(\pi)$ che vi sia un numero massimo d di pezzi non conformi in un campione di numerosità n è data da:

$$\Pr(\pi) = \sum_{k=0}^{d} \frac{\binom{D}{k} \cdot \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

L'andamento di tale funzione costituisce la cosiddetta **curva operativa** del collaudo.
L'andamento di tale curva per un lotto di dimensioni N predefinite varia al variare dal numero massimo di pezzi difettosi d considerato e al variane della numerosità n del campione.
Posto α = 6.0% e β = 8.0, se si estrae un campione costituito da n = 50 pezzi facenti parte di un lotto formato da N = 5000 elementi, al variare del numero massimo di pezzi difettosi d la curva operativa assume gli andamenti illustrati dal seguente grafico:



Se si considera un predeterminato limite di d = 3, al variare della numerosità n del campione estratto dal lotto di N = 5000 pezzi, la curva operativa assume gli andamenti illustrati dal seguente grafico:



In entrambi i casi le curve intersecano le rette relative alle soglie 1-$\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ che delimitano le aree del rischio del fornitore e dell'acquirente.
Le intersezioni sulla curva operativa di tali rette determinano, seppur a livello grafico, i valori:

- $\boldsymbol{\pi}_\alpha$ = **AQL**;
- $\boldsymbol{\pi}_\beta$ = **RQL**;